

Università di Bologna – Campus di Rimini - Corsi di laurea in Farmacia e CQPS

Simulazione prova esame MATEMATICA – 24/11/2014

1. Calcolare : $\frac{(n-1)!+n!}{(n-1)!}$; $\log_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$

2. Se il numero delle disposizioni con ripetizione di n oggetti a gruppi di 4 è 625, quanti sono gli oggetti? Quante sono le disposizioni semplici di tali oggetti a gruppi di 3?

3. Risolvere: $\sqrt[2]{8-x} \leq -5$; $|1-3x| \leq 2$; $7^{2x} \geq \frac{1}{49}$; $\log_{\frac{1}{3}}(5-x^2) > -1$ [9]

4. Determinare dominio, grafico e codominio della seguente funzione (studio globale):

$$y = f(x) = -e^x + 1$$

Determinare inoltre l'equazione della retta tangente in $x = 0$, una funzione primitiva di $f(x)$, e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. [18]

@ @ @

5. Eseguire lo studio analitico della funzione $y = \frac{\ln(x+1)}{x}$ [24]

6. Date la funzione $y = 2\sin(x)$, scegliere un opportuno intervallo sul quale essa sia iniettiva, e individuare dominio, grafico e codominio della funzione inversa.

7. Qual è la probabilità che una coppia di cavie da laboratorio generi 4 maschi in una nidata di 7 figli, supponendo che gli eventi maschio e femmina siano equiprobabili? Qual è la probabilità di generare 4 maschi su 7 figli nel caso che l'evento maschio abbia una probabilità pari a $\frac{6}{11}$? [30]

@ @ @

8. Dimostrare che la funzione derivata della funzione $y = |x|$ è $y = \frac{x}{|x|}$. [lode]

$$1. \frac{(n-1)! + n(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(1+n)(\cancel{n-1})!}{(\cancel{n-1})!} = \underline{n+1}$$

$$n^y = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$n^y = n^{-1/2}$$

$$y = -\frac{1}{2} = \log_n \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)$$

$$2. D_{n;4}^r = n^4 = 625 \quad n^4 = 5^4 \quad \underline{n=5}$$

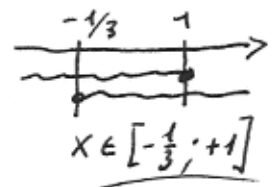
$$D_{5;3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = \underline{60}$$

$$3. * \sqrt[2]{8-x} \leq -5 \quad \nexists x \in \mathbb{R}$$

$$* |1-3x| \leq 2$$

$$-2 \leq 1-3x \leq +2$$

$$\begin{cases} 1-3x \geq -2 \\ 1-3x \leq +2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$$



$$* 7^{2x} \geq \frac{1}{49}$$

$$7^{2x} \geq 7^{-2}$$

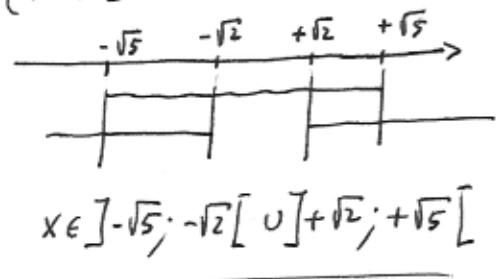
$$2x \geq -2$$

$$\underline{x \geq -1}$$

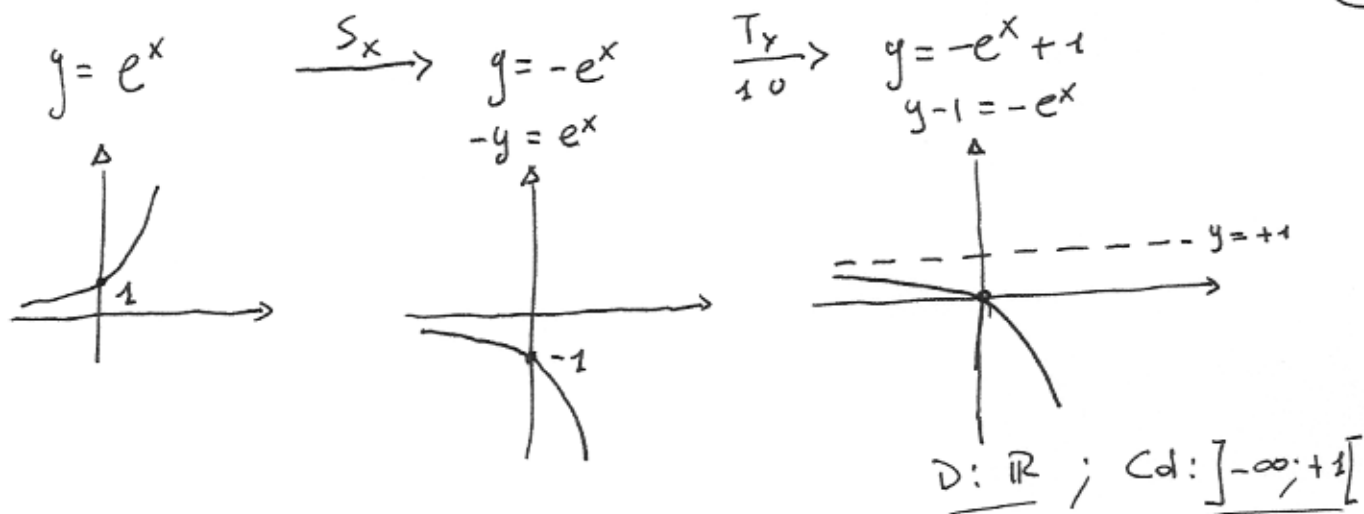
$$* \log_{1/3}(5-x^2) > -1 \quad \begin{cases} 5-x^2 > 0 \\ 5-x^2 < (\frac{1}{3})^{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-5 < 0 \\ 5-x^2 < 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in]-\sqrt{5}; +\sqrt{5}[\\ x^2 > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in]-\sqrt{5}; +\sqrt{5}[\\ x \in]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[\end{cases}$$

$$x \in]-\sqrt{5}; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\sqrt{5}[$$



4.



* $x = \phi \rightarrow y = -e^\phi + 1 = -1 + 1 = \phi$

$y'(x) = -e^x$

$m = y'(\phi) = -1$

$y = -1(x - \phi) + \phi \quad \underline{y = -x}$

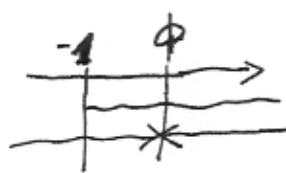
* $P(x) = -e^x + x + \text{cost.}$

* $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x + 1) = -\phi + 1 = 1$

ATTENZIONE! Gli esercizi n°5 e n°6 sono particolarmente difficili per lo standard d'esame

5. $y = \frac{\ln(x+1)}{x}$

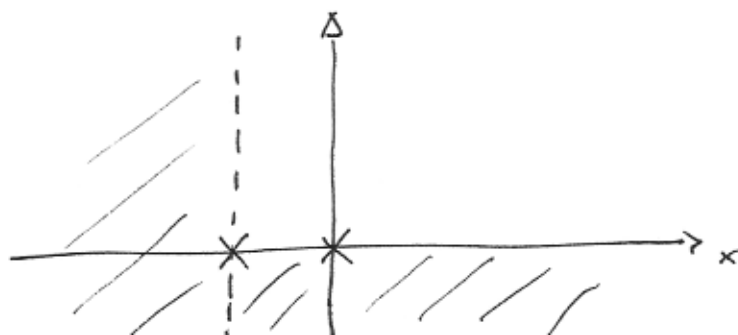
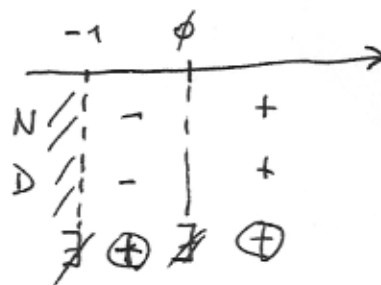
* $\begin{cases} x+1 > \phi \\ x \neq \phi \end{cases} \begin{cases} x > -1 \\ x \neq \phi \end{cases}$



$x \in]-1; \phi[\cup]\phi; +\infty[$

* Nessuna invarianza per simmetria

* ? $x: y \geq \phi \rightarrow N: \ln(x+1) \geq \phi \quad x+1 \geq 1 \quad \underline{x \geq 0}$
 $\rightarrow D: \underline{x \geq \phi}$

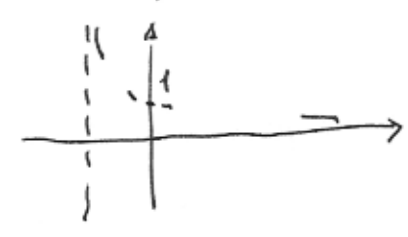


$$* \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(\phi^+)}{-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow \phi^-} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(\phi^-)}{\phi^-} = \frac{\phi^-}{\phi^-} \text{ [IND.]} = \lim_{x \rightarrow \phi^-} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1 \text{ (De l'Hôpital)}$$

$$* \lim_{x \rightarrow \phi^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \dots \dots \dots = 1$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \phi^+$$



$$* y'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \cdot x - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{\frac{x - (x+1) \cdot \ln(x+1)}{x+1}}{x^2} = \frac{x - (x+1) \cdot \ln(x+1)}{x^2(x+1)}$$

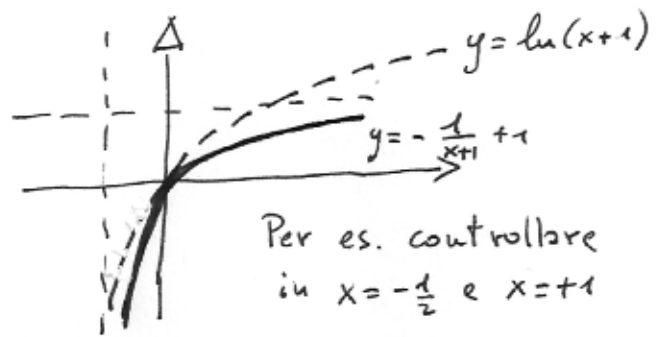
? X: $y' \geq \phi$
 \nearrow N: $x - (x+1) \cdot \ln(x+1) \geq \phi$
 \searrow D₁:
 \searrow D₂:

Difficile! seguire una via grafica . . .

? X: $N \geq \phi$ $\frac{x}{x+1} \geq \ln(x+1)$ $\frac{x+1-1}{x+1} \geq \ln(x+1)$ $1 - \frac{1}{x+1} \geq \ln(x+1)$

Confronto tra 2 funzioni che sappiamo disegnare . .

$y = -\frac{1}{x+1} + 1$ e $y = \ln(x+1)$



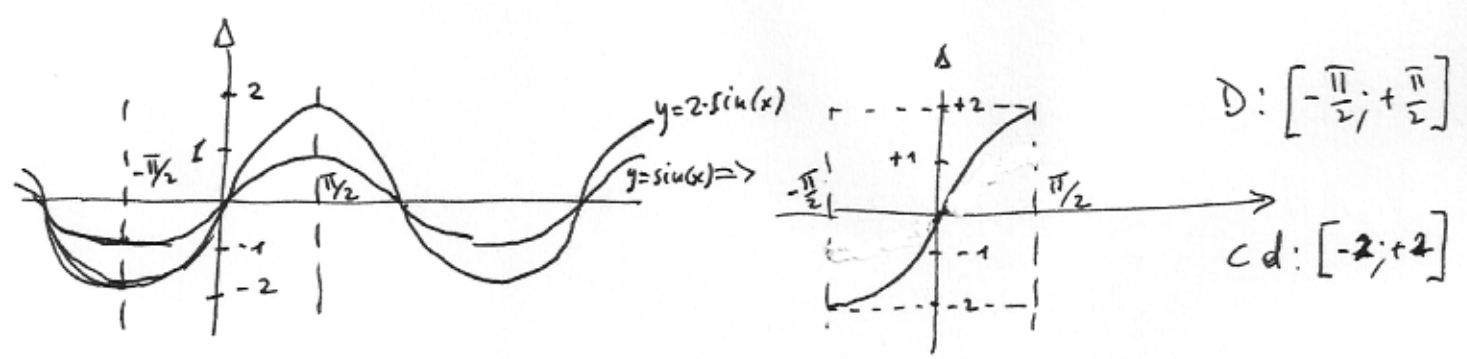
Quindi $N \geq 0 \quad \forall x \in \text{Dominio}$

? X: $D \geq \phi$ $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \text{Dominio}$

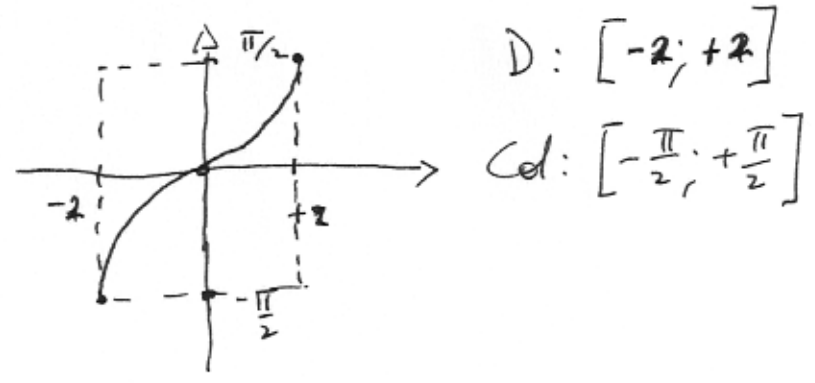
	-1		ϕ	
N	///	-	0	-
D	///	+	+	+
	$\exists \ominus$		$\exists \ominus$	

La funzione è decrescente sul suo dominio.

6. $y = 2 \cdot \sin(x)$ e invertiva se $x \in [-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$



$f^{-1}(x): x = 2 \cdot \sin(y) \quad \frac{x}{2} = \sin(y) \quad y = \arcsin(\frac{x}{2})$



7. $P(4M \text{ su } 7) = \frac{1}{2^7} C_{7;4} = \frac{7!}{2^7 \cdot 4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{2^7 \cdot 4! \cdot 6} = \frac{35}{128}$

$P'(4M \text{ su } 7) = C_{7;4} \left(\frac{6}{11}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{11}\right)^3$

8.
$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{|x+dx| - |x|}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{|x+dx| - |x|}{dx} \cdot \frac{|x+dx| + |x|}{|x+dx| + |x|}$$

$$= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{|x+dx|^2 - |x|^2}{dx \cdot (|x+dx| + |x|)} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx \cdot (|x+dx| + |x|)} =$$

$$= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x \cdot dx + dx^2 - x^2}{dx \cdot (|x+dx| + |x|)} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{dx(2x + dx)}{dx \cdot (|x+dx| + |x|)} = \frac{2x}{2|x|} = \frac{x}{|x|}$$

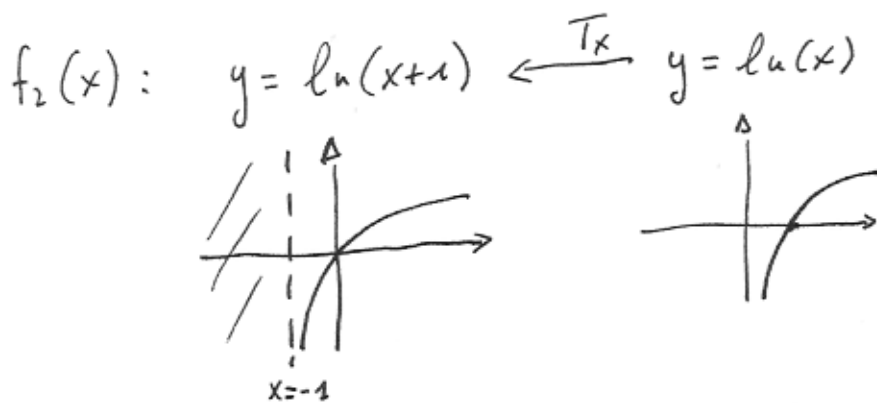
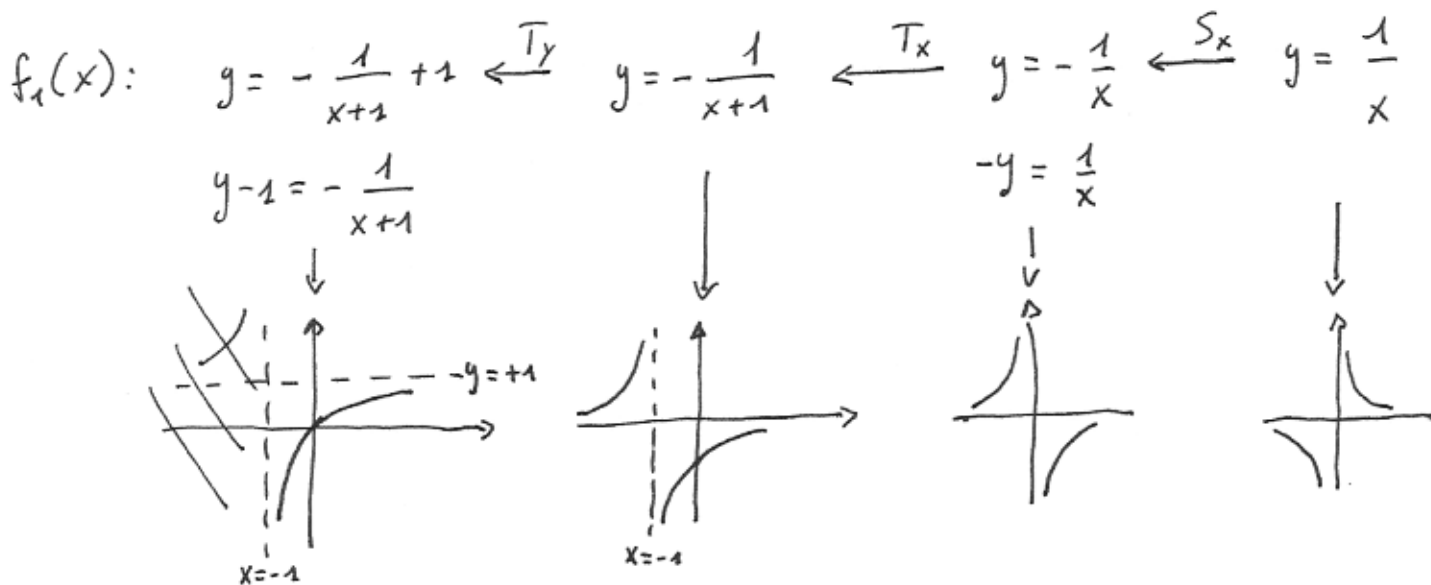
CHIARIMENTI SULLA RISOLUZIONE GRAFICA DELLA DISEQUAZIONE RELATIVA ALLO STUDIO DEL SEGNO DEL NUMERATORE DELLA DERIVATA

$$\frac{x}{x+1} - \ln(x+1) \geq 0$$

$$\frac{x}{x+1} \geq \ln(x+1)$$

\downarrow
 $f_1(x)$

\downarrow
 $f_2(x)$



$$f_1(\phi) = f_2(\phi) = \phi$$

Se $x = -\frac{1}{2}$ $f_1(-\frac{1}{2}) = -1$ $f_2(-\frac{1}{2}) = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2 \Rightarrow f_1(-\frac{1}{2}) < f_2(-\frac{1}{2})$

Se $x = 1$ $f_1(1) = +\frac{1}{2}$ $f_2(1) = \ln 2 > \ln \sqrt{e} = \ln e^{1/2} = \frac{1}{2} \Rightarrow f_1(1) < f_2(1)$

